Università di Pisa
Dipartimento di Informatica

Technical Report: TR-03-17

Ripensando all'attesa alle fermate

Carolina Billi
Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, *billi@di.unipi.it*

Guido Gentile
Dipartimento di Idraulica, Trasporti e Strade, Università di Roma 'La Sapienza'
guido.gentile@uniroma1.it

Sang Nguyen
Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal
sang.nguyen@umontreal.ca

Stefano Pallottino
Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, *pallo@di.unipi.it*

December 23, 2003

ADDRESS: via F. Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italy. TEL: +39 050 2212700 FAX: +39 050 2212726

Ripensando all'attesa alle fermate

Carolina Billi
Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, *billi@di.unipi.it*

Guido Gentile
Dipartimento di Idraulica, Trasporti e Strade, Università di Roma 'La Sapienza'
guido.gentile@uniroma1.it

Sang Nguyen
Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal
sang.nguyen@umontreal.ca

Stefano Pallottino
Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, *pallo@di.unipi.it*

December 23, 2003

1. INTRODUZIONE

Nel trasporto collettivo urbano in cui il servizio è percepito in termini di frequenza delle varie linee, la descrizione matematica della strategia di scelta del percorso è complessa in quanto l'attesa alla fermata, come è stato messo in luce in molti studi negli ultimi 30 anni, è un fenomeno "complesso in sé" che richiede uno studio specifico; si vedano, ad esempio, Chriqui e Robillard [1975], Marguier [1981], Gendreau [1984], Spiess [1984]. Al fine di avere buoni modelli di pianificazione del servizio, è importante poter disporre di un modello dell'attesa alle fermate che sia allo stesso tempo fedele al comportamento degli utenti, fondato matematicamente negli elementi in gioco, utilizzabile concretamente all'interno dei più generali modelli di assegnazione.

È questa la ragione che ci ha spinto a ripensare globalmente al *problema dell'attesa*, analizzando il processo stocastico degli arrivi dei veicoli e dei passeggeri alle fermate e le relazioni fra loro, senza dare per acquisite alcune ipotesi normalmente adottate. D'altronde, alcuni lavori degli anni '80 [Marguier 1981, Gendreau 1984, Marguier e Ceder 1984] già indicavano come fossero poco giustificabili alcune scelte modellistiche, comunque utilizzate negli anni seguenti.

2. IPOTESI MODELLISTICHE

Per poter trattare il problema dell'attesa a una fermata servita da una o più linee si debbono introdurre diverse ipotesi semplificatrici relativamente a tre sfere distinte: le interrelazioni tra arrivi di veicoli di linee diverse e gli arrivi dei passeggeri, le interrelazioni tra arrivi di veicoli della stessa linea, la conoscenza della rete e delle sue prestazioni da parte degli utenti. Nel seguito accenniamo brevemente alle ipotesi su cui baseremo il modello, rinviando a Gentile, Nguyen e Pallottino [2003a] e a Billi [2003] per maggiori dettagli sulle scelte effettuate e le relative conseguenze.

Per quanto riguarda gli arrivi di veicoli, si ipotizza che quelli relativi a linee diverse siano statisticamente indipendenti, così come sono statisticamente indipendenti gli arrivi dei passeggeri alle fermate rispetto agli arrivi dei veicoli.

L'analisi del processo stocastico degli arrivi dei veicoli di una stessa linea ad una determinata fermata obbliga a introdurre alcune ipotesi, peraltro del tutto giustificabili rispetto al fenomeno fisico. In [Billi 2003] vengono esplicitate le ipotesi fatte sulla distribuzione di probabilità dell'intertempo tra due veicoli successivi (tra cui anche la possibile assenza di densità di probabilità). La funzione che ci sembra più appropriata per rappresentare la funzione di densità di probabilità dell'intertempo è la funzione Gamma di parametro intero positivo m_i (detta *funzione di Erlang*), che tiene conto del livello di degrado della regolarità di servizio [Larson e Odoni 1981]. Da essa viene quindi derivata la funzione di densità di probabilità del *tempo di attesa* di una linea ℓ_i, che indicheremo con $f_i(w)$:

$$f_i(w) = \begin{cases} \lambda_i \, \mathrm{e}^{-m_i \lambda_i w} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(m_i \lambda_i w)^k}{k!}, & \text{se } w \geq 0; \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

dove λ_i è la *frequenza* della linea ℓ_i, cioè l'inverso del valor medio dell'intertempo.

Una spiegazione "fisica" del parametro m_i lega il tempo di passaggio di un determinato veicolo ai tempi di passaggio dei veicoli che lo precedono: dopo m_i passaggi consecutivi si ha perdita di memoria, cioè non vi è relazione tra il passaggio di un veicolo e quello dell'm_i-esimo che lo segue. Se si pone $m_i = 1$, la funzione di Erlang si riduce alla *funzione esponenziale* (assenza totale di memoria); il caso contrario lo si trova quando si fa tendere m_i a più infinito, ottendo la *distribuzione uniforme* (cadenzamento regolare qualunque sia la lunghezza della sequenza di veicoli).

Con riferimento al terzo gruppo di ipotesi, nel seguito considereremo utenti che percepiscono il sequenziamento degli arrivi dei veicoli della linee solo in termini delle loro frequenze e che conoscono relativamente bene la topologia della rete e il posizionamento delle fermate. Inoltre, assumeremo che ogni utente in attesa ad una fermata sia in grado di valutare con buona accuratezza, per ciascuna linea ℓ_i che serve tale fermata, la speranza matematica s_i del tempo occorrente per raggiungere la propria destinazione con tale linea, escludendo l'eventuale attesa, che chiameremo *tempo di viaggio* e che useremo come misura semplificata del costo generalizzato.

Si ipotizza inoltre che ogni utente trovi comunque posto sul veicolo che ha scelto, pagando casomai il costo del *discomfort* a bordo in funzione della densità dei passeggeri [Nguyen e Pallottino 1988].

3. IPOTESI COMPORTAMENTALI

Ogni utente è un decisore razionale che effettua le sue scelte con lo scopo di minimizzare il proprio costo generalizzato. La scelta dell'utente, in un modello statico quale quello cui ci riferiamo, è fatta *prima dell'inizio del viaggio* e comporta la sequenza iterata della scelta della fermata a cui andare, delle linee su cui salire e, per ciascuna di esse, della fermata a cui scendere. La rappresentazione classica di questo tipo di scelta è un *ipercammino* che connette l'origine con la destinazione e che ha i punti di diversione nei nodi fermata attraverso l'iperarco di attesa [Nguyen e Pallottino 1988]. Elementi chiave dell'ipercammino sono i pesi dei rami di ciascun iperarco di attesa che rappresentano le probabilità di salire a bordo dei veicoli delle relative linee, condizionate all'essere giunti a quella fermata.

Consideriamo quindi una singola fermata, un insieme $\mathcal{L}$ di linee che la servono e un utente che durante il proprio tragitto si trovi ad attendere una o più delle linee di $\mathcal{L}$ per raggiungere la propria destinazione. La probabilità di montare sulla linea $\ell_i \in \mathcal{L}$ misura con quale probabilità un veicolo di tale linea è il primo percepito come *attrattivo* dall'utente durante il suo processo di attesa, nel senso che risulta conveniente montarvici.

Si noti che, a differenza di quanto solitamente ipotizzato in letteratura, in questa sede non riteniamo in principio l'*insieme attrattivo* come una collezione di linee che sono considerate sempre attrattive dall'utente durante il suo processo di attesa. Infatti, nel senso più generale, consideriamo che l'utente abbia implicitamente definito, prima di iniziare il suo viaggio le linee di

$\mathcal{L}$ su cui è disposto a montare e, per ciascuna di esse, i periodi del proprio processo di attesa per i quali egli considera tale linea attrattiva. Ipotizziamo quindi che l'insieme attrattivo dell'utente sia definito in funzione del tempo t che è trascorso dal suo arrivo alla fermata; per questo lo chiameremo *insieme dinamico* e lo indicheremo con $D(t)$, definito per $0 \leq t \leq u_D$, dove u_D denota il massimo tempo di attesa alla fermata, ossia l'istante entro il quale con certezza giunga almeno un veicolo considerato attrattivo nel momento del suo arrivo (al limite, $u_D = +\infty$).

Nel modello comportamentale prendiamo in considerazione il tempo che l'utente trascorre in attesa alla fermata senza il passaggio di alcun veicolo attrattivo; questo tempo è un'*informazione* che l'utente acquisisce durante l'attesa e che incide sulla percezione della speranza matematica del tempo rimanente di attesa di ciascuna linea. Ad esempio, supponiamo che la linea ℓ_i sia perfettamente regolare ($f_i(w)$ è la funzione di distribuzione uniforme) e che abbia intertempo $u_i = 20$ min e tempo di viaggio $s_i = 30$ min. Al momento dell'arrivo alla fermata la speranza matematica del tempo di viaggio è $10 + 30 = 40$ min. Dopo 10 minuti di attesa, la speranza matematica del tempo rimanente di attesa è di 5 minuti e quindi il *tempo rimanente di viaggio* è sceso a $5 + 30 = 35$ min (il tempo complessivo è invece cresciuto poiché ai 35 minuti vanno aggiunti i 10 minuti già attesi).

4. PROPRIETÀ DELL'INSIEME DINAMICO

Sia $D(t), 0 \leq t \leq u_D$, l'insieme dinamico definito a priori dall'utente. A $D(t)$ è associata la funzione del *tempo rimanente* di viaggio $RT_D(t), 0 \leq t \leq u_D$, che per ogni istante $\tau \in [0, u_D]$ fornisce il tempo $RT_D(\tau)$ che rimane da attendere e viaggiare nel caso non sia arrivato alcun veicolo attrattivo durante l'intervallo di tempo $[0, \tau)$. La condizione di attrattività di una linea ℓ_i al tempo τ è data da:

$$s_i \leq RT_D(\tau); \tag{1}$$

infatti, in tal caso è conveniente montare sulla linea piuttosto che continuare ad attendere, mentre conviene non montare nel caso contrario. Diremo che $D(t)$ è *istantaneamente attrattivo* al tempo τ se esso è formato da tutte e sole le linee $\ell_i \in \mathcal{L}$ che verificano la condizione (1); inoltre $D(t)$ è *globalmente attrattivo* se e solo se è istantaneamente attrattivo per ogni $\tau \in [0, u_D]$.

In [Gentile, Nguyen, Pallottino 2003b] viene mostrato che, se si ipotizza la monotonia del tempo rimanente di attesa di ciascuna linea (cioè che al crescere del tempo trascorso in attesa alla fermata, il tempo rimanente di attesa di ciascuna linea non può crescere), allora è monotonicamente non crescente la funzione del tempo rimanente di viaggio di un insieme dinamico globalmente attrattivo. Da questa *proprietà di monotonia* discende che se una linea $\ell_i \in \mathcal{L}$ è attrattiva, lo è per un intervallo di tempo $[0, t_i]$, con $0 < t_i \leq u_D$ (una linea non attrattiva al tempo $\tau = 0$ non è mai attrattiva). Inoltre, l'insieme dinamico globalmente attrattivo $D(t)$ esiste, è unico e varia (si riduce) un numero finito di volte. Esso è definito, per costruzione, come:

$$D(\tau) = \{\ell_i \in \mathcal{L} : s_i \leq RT_D(\tau)\}, \qquad \forall\, 0 \leq \tau \leq u_D. \tag{2}$$

Senza perdere di generalità, consideriamo che le linee siano ordinate secondo il loro tempo di viaggio e che essi siano diversi tra loro, cioè che si abbia $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$, con $n = |\mathcal{L}|$; inoltre, indicheremo con $L_j = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_j\}$ l'insieme delle j linee più "rapide" nel portare a destinazione. Consideriamo il tempo t_j in cui $RT_D(t_j) = s_j$. Essendo $RT_D(t)$ una funzione monotonicamente non crescente, dalla (2) si ha che $D(t_j) = L_j$ e che esiste un tempo $t_{j+1} < t_j$ per il quale $RT_D(t_{j+1}) = s_{j+1}$ (oppure $t_{j+1} = 0$ e $RT_D(t_{j+1}) > s_{j+1}$). Nell'intervallo di tempo trascorso in attesa $(t_{j+1}, t_j]$ (oppure $[0, t_j]$ se $t_{j+1} = 0$) l'insieme dinamico non cambia (diciamo che è "statico"). Essendo n le linee che servono la fermata, la dinamicità di $D(t)$ è descritta al più da n intervalli di tempo nei quali $D(t)$ è statico. In generale, denotiamo con L_q l'insieme delle linee attrattive per l'intero intervallo $[0, u_D]$ e con L_r, $r \geq q$, l'insieme delle linee attrattive al tempo $\tau = 0$; pertanto le linee $\ell_{r+1}, \ldots, \ell_n$ non sono mai attrattive.

5. SPERANZE MATEMATICHE E PROBABILITÀ

In [Gentile, Nguyen e Pallottino 2003b] vengono forniti gli elementi teorici necessari alla formulazione della funzione $RT_D(t)$ e delle probabilità di occorrenza della salita a bordo delle varie linee. Qui forniamo solo gli elementi più importanti; con u_i indicheremo l'estremo superiore relativo all'intervallo di definizione della funzione $f_i(w)$ per la linea ℓ_i ($+\infty$ in caso di distribuzione non limitata), mentre con $F_i(w)$ indicheremo la funzione di ditribuzione cumulativa del tempo di attesa. In particolare ci interesserà la funzione complementare:

$$\overline{F}_i(w) \quad = \quad 1 - F_i(w) = \int_w^{u_i} f_i(t)\ dt.$$

La funzione di densità di probabilità del tempo di attesa della linea ℓ_i, condizionata ad aver atteso sino al tempo τ è:

$$f_{i|\tau}(w) = \frac{f_i(w)}{\overline{F}_i(\tau)}, \quad \text{se } w \in [\tau, u_i],$$

con $f_{i|\tau}(w) = 0$ al di fuori dell'intervallo; il complemento della corrispondente funzione di distribuzione cumulativa è:

$$\overline{F}_{i|\tau}(w) = \int_w^{u_i} f_{i|\tau}(t)\ dt = \begin{cases} \frac{\overline{F}_i(w)}{\overline{F}_i(\tau)}, & \text{se } \tau < w \leq u_i; \\ 1, & \text{se } w \leq \tau. \end{cases}$$

Ricordando il significato dato ai tempi t_j per le varie linee attrattive, consideriamo il caso in cui l'utente abbia atteso inutilmente sino all'istante τ, con $t_{j+1} < \tau \leq t_j$, in cui le linee $\ell_1, \ldots, \ell_j$ sono attrattive, mentre le linee $\ell_{j+1}, \ldots, \ell_r$ non lo sono più. La probabilità, che denoteremo con $\pi_i^j(\tau, t_j)$, che il primo arrivo attrattivo avvenga nell'intervallo di tempo $[\tau, t_j]$, per un $\tau > t_{j+1}$, e sia relativo ad un veicolo della linea ℓ_i, con $i \leq j$, è data da [Gentile, Nguyen e Pallottino, 2003b]:

$$\pi_i^j(\tau, t_j) = \int_\tau^{t_j} \frac{f_{i|\tau}(w)}{\overline{F}_{i|\tau}(w)} \prod_{k=1}^{j} \overline{F}_{k|\tau}(w)\ dw = \int_\tau^{t_j} \frac{f_i(w)}{\overline{F}_i(w)} \prod_{k=1}^{j} \frac{\overline{F}_k(w)}{\overline{F}_k(\tau)}\ dw.$$

Analogamente, la quota parte di speranza matematica del tempo che rimane da attendere, nel caso in cui il primo veicolo attrattivo arrivi in $[\tau, t_j]$, è data da:

$$\Omega^j(\tau, t_j) \quad = \quad \int_\tau^{t_j} (w - \tau) \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{f_i(w)}{\overline{F}_i(w)} \right) \prod_{k=1}^{j} \frac{\overline{F}_k(w)}{\overline{F}_k(\tau)}\ dw.$$

Infine, la quota parte di speranza matematica del tempo rimanente di viaggio, sempre nel caso in cui il primo veicolo attrattivo arrivi in $[\tau, t_j]$, è data da:

$$\Psi^j(\tau, t_j) = \int_\tau^{t_j} \left(\sum_{i=1}^{j} (w + s_i - \tau)\ \frac{f_i(w)}{\overline{F}_i(w)} \right) \prod_{k=1}^{j} \frac{\overline{F}_k(w)}{\overline{F}_k(\tau)}\ dw. \tag{3}$$

Sapendo che $RT_D(t_j) = s_j$, mediante quest'ultima formula è possibile fornire una descrizione "locale" della funzione del tempo rimanente $RT_D^j(t)$ relativamente al generico intervallo $(t_{j+1}, t_j]$, in cui l'insieme attrattivo "statico" è L_j:

$$RT_D^j(\tau) \quad = \quad \begin{cases} \Psi^j(\tau, t_j) + s_j \displaystyle\prod_{k=1}^{j} \frac{\overline{F}_k(t_j)}{\overline{F}_k(\tau)}, & j = q+1, \ldots, r; \\ \Psi^q(\tau, u_D) + RT_D(u_D) \displaystyle\prod_{k=1}^{q} \frac{\overline{F}_k(u_D)}{\overline{F}_k(\tau)}, & j = q; \end{cases} \tag{4}$$

dove $RT_D(u_D) = \min\{RT_D^j(u_D) : j = 1, \ldots, n\}$. Si noti che se u_D è un valore finito, allora $RT_D(u_D) = s_q$; se invece $u_D = +\infty$, in generale si ha $q = 1$ e $RT_D(u_D) = s_1$; salvo nel caso in cui le distribuzioni delle linee attrattive sono esponenziali (si veda il paragrafo 7).

L'equazione (4) esprime il tempo rimanente di viaggio come la somma della sua quota parte $\Psi^j(\tau, t_j)$, nel caso vi sia un arrivo attrattivo tra $[\tau, t_j]$, e della parte restante s_j, opportunamente pesata dalla probabilità che l'utente debba attendere con insuccesso sino a t_j.

Mediante la (4) è possibile verificare se la linea ℓ_{j+1} è attrattiva per almeno una parte del processo di attesa. Infatti, basta controllare se $RT_D^j(0) \leq s_{j+1}$. In caso affermativo, la linea ℓ_{j+1} non è mai attrattiva, cioè $r = j$ e $t_{j+1} = 0$. Altrimenti si determina il tempo t_{j+1} per il quale $RT_D^j(t_{j+1}) = s_{j+1}$, e quindi si ha $RT_D(\tau) = RT_D^j(\tau)$, per ogni $\tau \in (t_{j+1}, t_j]$. La forma locale di $RT_D^j(\tau)$ e la ricerca di t_{j+1} suggeriscono una "costruzione all'indietro" della funzione del tempo rimanente di viaggio. La speranza matematica del tempo di viaggio è quindi data da:

$$ET = RT_D(0);$$

mentre la probabilità di utilizzare veicoli della linea $\ell_i \in L_r$ è data da:

$$\pi_i = \sum_{h=p}^{r} \prod_{j=h+1}^{r} \overline{F}_j(t_j)\ \pi_i^j(t_{j+1}, t_j) = \sum_{h=p}^{r} \prod_{j=h+1}^{r} \overline{F}_j(t_j) \int_{t_{j+1}}^{t_j} \frac{f_i(w)}{\overline{F}_i(w)} \prod_{k=1}^{j} \overline{F}_k(w)\ dw; \tag{5}$$

dove $p = \max\{i, q\}$. Ovviamente $\pi_i = 0$, per le linee non attrattive ℓ_i, $i = r+1, \ldots, n$.

6. UN ESEMPIO NUMERICO

Sia $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$, le funzioni di densità di probabilità sono uniformi e i dati sono $s_1 = 30, s_2 = 40, s_3 = 45$ e $u_1 = 50, u_2 = 40, u_3 = 30$. Il processo di attesa è limitato all'intervallo $[0, u_D = 50 = u_1]$ e ℓ_1 è l'unica linea attrattiva all'istante $t_1 = 50$. La funzione $RT_D^1(\tau) = (u_1 - \tau)/2 + s_1 = (50 - \tau)/2 + 30 = 55 - \tau/2$. Al tempo $t = 0$ si ha $RT_D^1(0) = 55 > 40 = s_2$ e quindi ℓ_2 è una linea attrattiva sino al tempo t_2 tale che $RT_D^1(t_2) = 40$, cioè per $t_2 = 30$. La funzione $RT_D^2(\tau)$, per $\tau \leq 30$ è disegnata in figura 1. Dalla figura 2 si evince che $RT_D^2(0) > 45 = s_3$, anche ℓ_3 è attrattiva, il valore t_3 per il quale si ha $RT_D^2(t_3) = 45$ è $t_3 = 50/3 \approx 16.7$.

In figura 2 viene riportata anche la funzione $RT_D^3(\tau)$ che completa la descrizione della funzione del tempo rimanente:

$$R_D(t) = \begin{cases} RT_D^3(t), & \text{se } 0 \leq t \leq 50/3, \\ RT_D^2(t), & \text{se } 50/3 < t \leq 30, \\ RT_D^1(t), & \text{se } 30 < t \leq 50; \end{cases}$$

l'insieme dinamico globalmente attrattivo è:

$$D(t) = \begin{cases} L_3, & \text{se } 0 \leq t \leq 50/3, \\ L_2, & \text{se } 50/3 < t \leq 30, \\ L_1, & \text{se } 30 < t \leq 50. \end{cases}$$

7. IL CASO DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Analizziamo ora il caso in cui le funzioni di densità di probabilità seguono la legge esponenziale, cioè il caso di massimo degrado del servizio di trasporto:

$$f_i(w) = \begin{cases} \lambda_i\, e^{-\lambda_i w}, & \text{se } w \geq 0; \\ 0, & \text{altrimenti}; \end{cases} \qquad \ell_i \in \mathcal{L}.$$

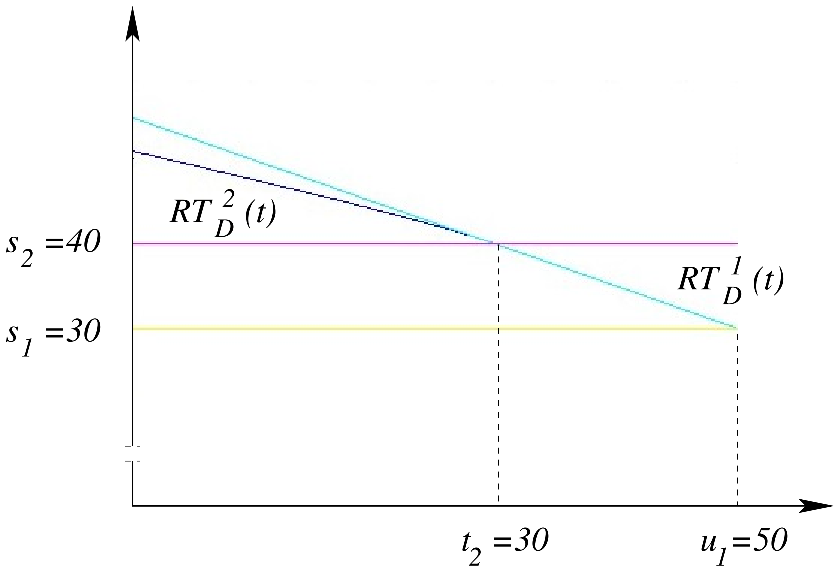

Figura 1: individuazione di t_2 e definizione di $RT_D^2(\tau)$

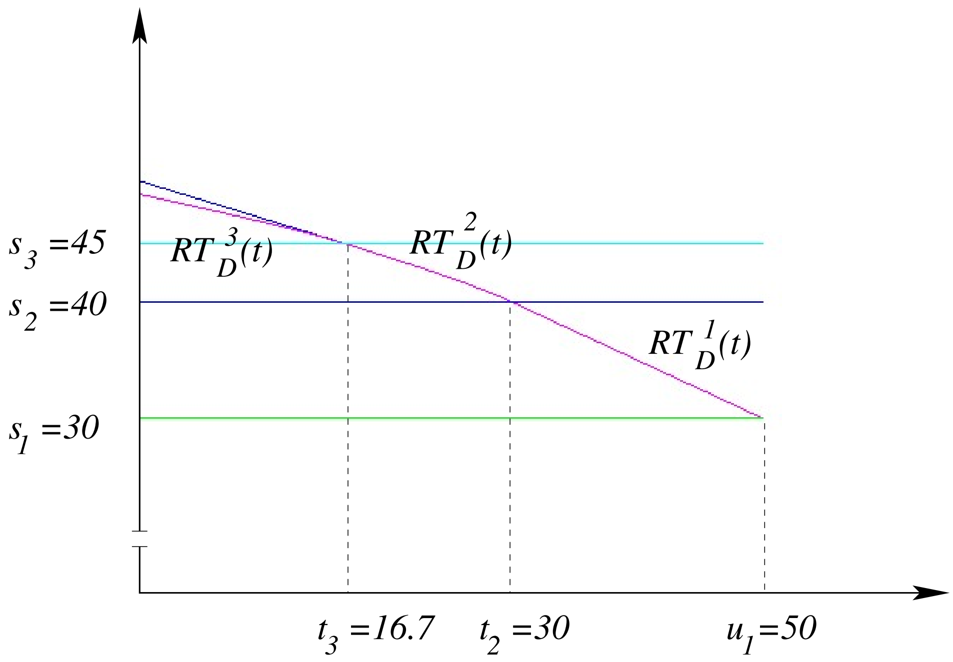

Figura 2: individuazione di t_3 e definizione di $RT_D^3(\tau)$

Non vi è limitazione superiore alle funzioni di densità di probabilità, pertanto $u_D = +\infty$. Le funzioni $\overline{F}_{i|\tau}(w),\ i = 1, \ldots, n$ sono date da:

$$\overline{F}_{i|\tau}(w) = \begin{cases} e^{-\lambda_i w}, & \text{se } w \geq 0; \\ 1, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

si noti che la distribuzione condizionata non dipende dal tempo trascorso in attesa.

Consideriamo l'insieme L_j e valutiamo la formula (4) nel caso di distribuzioni esponenziali:

$$RT_D^j(\tau) = \Psi^j(\tau, +\infty) = \frac{1+\sum_{k=1}^{j} \lambda_k s_k}{\sum_{k=1}^{j} \lambda_k}.$$

Si noti che la funzione non dipende da τ. Infatti, è ben noto che la distribuzione esponenziale rappresenta il fenomeno di un'attesa che non modifica la speranza matematica dell'attesa restante. In tal caso si ha che l'insieme dinamico globalmente attrattivo è statico nell'intero intervallo $[0, +\infty)$ e coincide con l'insieme L_q che minimizza la funzione:

$$RT_D^q(0) = \min\{\frac{1 + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k s_k}{\sum_{k=1}^{j} \lambda_k : j = 1, \ldots, n}. \tag{6}$$

La formula (6) non è altro che la funzione normalmente adottata in tutti i modelli utilizzati per pianificare le reti di trasporto collettivo negli ultimi 20 anni. Abbiamo pertanto ottenuto il caso utilizzato, con una struttura statica, come caso particolare del modello dinamico proposto. Purtroppo, la scelta delle distribuzioni esponenziali per rappresentare le funzioni di densità di probabilità dell'attesa delle linee appare del tutto inadeguata in quanto è nei fatti impossibile che si abbia un tale tipo di distribuzione per ogni linea del servizio e per ciascuna fermata da essa servita, compresi i capilinea e le fermate immediatamente successive. Sarebbe invece più opportuno assegnare un valore dell'indice di regolarità m_i decrescente alle varie fermate della linea ℓ_i man mano che la sua regolarità degrada allontanandosi dal capolinea.

8. NECESSITÀ DI UN MODELLO DINAMICO

Si consideri il seguente esempio con solo due linee la cui funzione di densità di probabilità ha distribuzione uniforme. I dati delle due linee sono $u_1 = u_2 = 50$ min, $s_1 = 30$ min e $s_2 = 50$ min. Applicando il modello dinamico descritto otteniamo il seguente insieme dinamico globalmente attrattivo:

$$D(t) = \begin{cases} L_2, & \text{se } 0 \leq t \leq 10, \\ L_1, & \text{se } 10 < t \leq 50, \end{cases}$$

con speranza matematica di viaggio $RT_D(0) = 54.53$ e probabilità di utilizzo delle linee $\pi_1 = .82, \pi_2 = .18$.

Se si fosse adottato il classico approccio, valido per le distribuzioni esponenziali, avremmo ottenuto, considerando L_1 come insieme attrattivo per l'intero intervallo $[0, 50]$, una speranza matematica di viaggio $ET(L_1) = 55$, mentre se avessimo considerato l'insieme L_2 avremmo ottenuto $ET(L_2) = 56.67$. L'insieme attrattivo scelto dall'utente sarebbe pertanto L_1. Oltre ad avere un valore maggiore del valore $RT_D(0)$ dell'insieme dinamico, la differenza sensibile la si ottiene nelle probabilità di utilizzo delle linee: l'approccio (errato) statico avrebbe sopravvalutato (del 12%) l'utilizzo della linea ℓ_1 a scapito della ℓ_2.

L'errore di uso dell'approccio statico per funzioni di densità diverse da quella esponenziale è ancora più evidente se si confronta $s_2 = 50$ con $ET(L_1) = 55$; infatti $s_2 < ET(L_1)$ mostra che un utente rinuncerebbe a montare su un veicolo della linea ℓ_2 anche se arrivasse nei primi istanti della propria attesa in quanto non considera tale linea attrattiva, seppure la scelta di montare darebbe un vantaggio in termini di tempo di viaggio. Cade cioè il principio della scelta razionale di minimizzare il proprio costo generalizzato di viaggio.

9. ASPETTI COMPUTAZIONALI

Le formule (3) e (5) richiedono in generale il calcolo di diversi integrali, calcolo che potrebbe allo stesso tempo essere computazionalmente oneroso e affetto da errori di approssimazione difficili da controllare nella loro propagazione. Ciò può essere evitato; infatti, basta notare che nelle formule citate la funzione da integrare non è altro che la sommatoria di diversi addendi, ciascuno dei quali ha la forma:

$$\int \beta \ \mathrm{e}^{-\alpha x} \ x^v \ dx = -\beta \ \mathrm{e}^{-\alpha x} \sum_{k=0}^{v} \frac{v!}{k!} \ \frac{x^k}{\alpha^{v-k+1}} + c,$$

dove α e β sono parametri reali mentre v è un parametro intero non negativo e c è una costante additiva. Pertanto, anche se si usano funzioni di Erlang con coefficiente di regolarità più grande di 1, è possibile calcolare la speranza matematica del tempo di viaggio e le probabilità delle varie linee mediante operazioni facilmente organizzabili per ridurre il numero di operazioni e per controllare gli errori di approssimazione. Questo approccio di calcolo si ispira a quello proposto da Gendreau [1984].

Possiamo pertanto affermare che la generalizzazione alle funzioni di Erlang di qualsiasi forma e l'adozione del modello dinamico, non comportano un aggravio significativo del tempo di calcolo e forniscono un modello matematicamente ben fondato e che interpreta meglio le caratteristiche comportamentali degli utenti.

10. LE PALINE INFORMATIVE ALLE FERMATE

Sempre più nelle nostre città vengono impiantate alle fermate le paline informative, cioè paline con display che fornisce "on-line" il tempo mancante all'arrivo del primo veicolo di ciascuna linea. Le informazioni affisse, nei sistemi che funzionano, forniscono una valutazione molto precisa che viene utilizzata dall'utente nel proprio comportamento e nelle proprie scelte. Analoghi sistemi informativi sono ottenibili attraverso la telefonia cellulare e internet semplicemente digitando il codice della fermata.

Un lavoro di riflessione sull'attesa alle fermate non può esimersi dall'esaminare l'influenza che questa informazione ha sul comportamento degli utenti e dal derivare un modello comportamentale.

Consideriamo la solita fermata, l'insieme $\mathcal{L}$ e l'utente che arriva alla fermata. Egli conosce i valori $s_1, \ldots, s_n$ dei tempo di viaggio delle n linee che servono la fermata e, prima di iniziare il viaggio, ha deciso che, appena raggiunta la fermata, acquisirà i valori affissi dell'attesa, che indicheremo con $w_1, \ldots, w_n$, del primo veicolo di ciascuna linea, e sceglierà la linea ℓ_i che minimizzerà il suo tempo di viaggio:

$$w_i + s_i = \min\{w_j + s_j : \ell_j \in \mathcal{L}\}. \tag{7}$$

Il comportamento razionale dell'utente è semplice. Meno semplice è il fatto che la variabile $w_i, i = 1, \ldots, n$, è una variabile aleatoria di cui si conosce la funzione di densità di probabilità $f_i(w)$ e di cui si deve valutare la probabilità che acquisisca un valore, rispetto ai valori delle altre variabili aleatorie $w_j, j \neq i$, per cui si verifichi la condizione (7). Dall'indipendenza dell'arrivo degli utenti e dei veicoli di linee diverse alla fermata, è possibile esprimere la probabilità π_i con cui i valori delle attese affisse alla fermata siano tali che il minimo della condizione (7) sia ottenuto per la linea $\ell_i \in \mathcal{L}$:

$$\pi_i = \int_0^{+\infty} \gamma_i(w) \ dw = \int_0^{+\infty} f_i(w) \prod_{\ell_j \in \mathcal{L} \setminus \{\ell_i\}} \overline{F}_j(w + s_i - s_j) \ dw.$$

Infatti, la funzione $\overline{F}_j(w+s_i-s_j)$ esprime la probabilità con cui il valore w_j dell'attesa per la linea ℓ_j affisso alla fermata risulti superiore a $w_i+s_i-s_j$, cioè un valore per cui ℓ_i viene preferita a ℓ_j, per qualsiasi valore w che la variabile aleatoria w_i può assumere.

La speranza matematica del tempo di attesa è data da:

$$\begin{aligned} EW &= \sum_{\ell_i\in\mathcal{L}}\int_0^{+\infty} w\gamma_i(w)\ dw \ = \ \int_0^{+\infty} w\sum_{\ell_i\in\mathcal{L}}\gamma_i(w)\ dw \\ &= \int_0^{+\infty} w\sum_{\ell_i\in\mathcal{L}} f_i(w) \prod_{\ell_j\in\mathcal{L}\setminus\{\ell_i\}} \overline{F}_j(w+s_i-s_j)\ dw. \end{aligned}$$

La somma $\sum_{\ell_i\in\mathcal{L}}\gamma_i(w)$ può essere considerata come la funzione di densità di probabilità della speranza matematica dell'attesa. La speranza matematica del tempo di viaggio è data da:

$$ET = \sum_{\ell_i\in\mathcal{L}}\int_0^{+\infty}(w+s_i)\gamma_i(w)\ dw.$$

Per maggiori dettagli si rinvia a [Billi 2003, Gentile, Nguyen e Pallottino 2003a]. Vogliamo qui notare solo che gli aspetti computazionali sono del tutto simili a quanto descritto nel paragrafo 9 e che, una volta modificato l'algoritmo per la determinazione dell'insieme attrattivo ottimo (di speranza matematica minima), un qualsiasi modello di assegnazione dei flussi del trasporto collettivo per ipercammini (statico o semi-dinamico, deterministico o stocastico, con costi più o meno simmetrici, a domanda fissa o variabile, utilizzato a sé o in un contesto di mobilità multimodale, ecc.) viene automaticamente adattato all'analisi di servizi di trasporto con informazione all'utenza.

11. DI NUOVO L'ESEMPIO NUMERICO

Mostriamo ora i risultati che si ottengono per i due modelli proposti, modello dinamico e modello con informazione, sullo stesso esempio descritto nel paragrafo 6: $\mathcal{L}=\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\}$, $s_1=30, s_2=40, s_3=45$ e $u_1=50, u_2=40, u_3=30$, in cui consideriamo diversi livelli di regolarità del servizio, utilizzando quattro diversi valori di m uguali per tutte e tre le linee.

I valori ottenuti nel caso con informazione sono riportati nella tabella 1, in cui con EW ed ET indichiamo la speranza matematica rispettivamente del tempo di attesa e del tempo di viaggio.

	$m=1$	$m=4$	$m=10$	$m\to+\infty$
EW	13.89	11.52	11.28	11.21
ET	51.08	48.07	47.69	47.59
π_1	0.422	0.468	0.478	0.481
π_2	0.300	0.288	0.284	0.281
π_3	0.278	0.244	0.238	0.238

Tabella 1: speranze matematiche e probabilità nel caso con informazione

La tabella 2 fornisce gli stessi valori per il modello dinamico.

Per entrambi i modelli la speranza matematica del tempo di viaggio decresce al crescere della regolarità; con il modello con informazione si ottengono valori più bassi di quelli ottenuti col modello dinamico, mostrando l'utilità dell'informazione alle paline per permettere migliori scelte agli utenti. Dal punto di vista di utilizzo delle linee, l'informazione all'utenza favorisce

	$m=1$	$m=4$	$m=10$	$m \to +\infty$
EW	12.76	9.95	9.90	10.35
ET	52.34	49.78	49.48	49.31
π_1	0.225	0.240	0.250	0.291
π_2	0.319	0.314	0.335	0.336
π_3	0.426	0.447	0.415	0.373

Tabella 2: speranze matematiche e probabilità nel caso dinamico

l'utilizzo delle linee più veloci nel portare a destinazione a scapito delle linee meno veloci, anche se più frequenti. Infatti, guardando al caso deterministico, il 48% degli utenti utilizza la linea ℓ_1 se si hanno le informazioni a disposizione, piuttosto che il 29%; cioè il 20% circa degli utenti si sposterebbe dalle linee meno veloci verso la più veloce se fosse fornita l'informazione alle paline. Tale percentuale è ancora più alta per $m = 4$ e $m = 10$.

È comunque interessante analizzare i dati che si sarebbero ottenuti se si fosse utilizzato il modello statico, valido solo se $m = 1$ e in questo caso coincidente col modello dinamico, anche per altri valori di m. I dati sono riportati nella tabella 3.

	$m=1$	$m=4$	$m=10$	$m \to +\infty$
EW	12.76	9.94	9.55	9.40
ET	52.34	49.80	49.53	49.50
π_1	0.255	0.240	0.232	0.225
π_2	0.319	0.313	0.309	0.300
π_3	0.426	0.447	0.459	0.475

Tabella 3: speranze matematiche e probabilità nel caso statico

Confrontando le probabilità di occorrenza delle linee nei casi statico e dinamico per $m > 1$ e crescente, notiamo che l'utilizzo della linea ℓ_1 nel modello statico decresce, in significativa controtendenza rispetto a quanto ottenuto con il modello dinamico, a vantaggio della linea ℓ_3, più lenta ma più frequente. Ciò mostra, se ancora ve ne fosse bisogno, l'inadeguatezza del modello statico nel caso si vogliano studiare reti con diversi gradi di regolarità del servizio.

CONCLUSIONI

Abbiamo descritto un nuovo, e matematicamente ben fondato, modello della scelta delle linee di trasporto collettivo di un servizio urbano in cui si possa tenere conto, per ciascuna linea e per ciascuna tratta di essa, del livello di regolarità del servizio. Abbiamo anche mostrato la tecnica di calcolo suggerendo alcuni aspetti computazionali che ne garantiscono l'efficienza.

Le ipotesi di indipendenza degli arrivi degli utenti e dei veicoli di linee diverse alle fermate si sono rivelate necessarie per la stesura del modello. È nostra intenzione analizzare quanto sia possibile rilassare tali condizioni senza perdere in semplicità del modello e in efficienza computazionale.

Abbiamo anche accennato, molto velocemente, al modello con informazione all'utenza. Esso è necessario se si vuole studiare l'effetto di tale informazione sul comportamento degli utenti, o se si vuole pianificare un servizio meglio rispondente al nuovo stato di utilizzo della rete. L'informazione relativa ai passaggi dei veicoli alle fermate, introdotta in un Data Base, permette di ottenere statistiche realistiche sull'interdipendenza dei passaggi di veicoli di linee diverse. È nostra intenzione studiare un modello che tenga conto di tali dati statistici, come valutazione sperimentale delle interrelazioni tra coppie di linee, nella valutazione delle scelte degli utenti.

BIBLIOGRAFIA

Billi C. (2003). Sui modelli matematici per il trasporto pubblico urbano. Tesi di Laurea in Matematica, Università di Pisa.

Chriqui C. e P. Robillard (1975). Common bus line. *Transportation Science* **9**, pp.115–121.

Gendreau M. (1984). Une étude approfondie d'un modèle d'équilibre pour l'affectation des passagers dans les réseaux de transport en commun. Ph.D. thesis, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, Canada.

Gentile G., S. Nguyen e S. Pallottino (2003a). Route Choice on transit networks with on-line information at stops. TR-03-14, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, sottoposto a *Transportation Science*.

Gentile G., S. Nguyen e S. Pallottino (2003b). Passengers' behavior in transit networks with common lines: a dynamic attractive set model. Manoscritto, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa.

Larson R.C. e A.R. Odoni (1981). *Urban Operations Research*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs.

Marguier P.H.J. (1981). Optimal strategies in waiting for common bus lines, Master's thesis, Department of Civil Engineering, M.I.T., Cambridge, USA.

Marguier P.H.J. e A. Ceder (1984). Passenger waiting strategies for overlapping bus routes. *Transportation Science* **18**, pp.207–230.

Nguyen, S. e S. Pallottino (1988). Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks. *European Journal of Operational Research* **37**, pp.176–186.

Spiess, H. (1984). Contributions à la théorie et aux outils de planification des réseaux de transport urbain, Ph.D. thesis, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, Canada.